

\$SPAD/input schaum29.input

Timothy Daly

June 15, 2008

Contents

1	[1]:14.590	$\int \sinh ax \cosh ax \, dx$	3
2	[1]:14.591	$\int \sinh px \cosh qx \, dx$	5
3	[1]:14.592	$\int \sinh^n ax \cosh ax \, dx$	6
4	[1]:14.593	$\int \cosh^n ax \sinh ax \, dx$	7
5	[1]:14.594	$\int \sinh^2 ax \cosh^2 ax \, dx$	8
6	[1]:14.595	$\int \frac{dx}{\sinh ax \cosh ax}$	9
7	[1]:14.596	$\int \frac{dx}{\sinh^2 ax \cosh ax}$	11
8	[1]:14.597	$\int \frac{dx}{\sinh ax \cosh^2 ax}$	13
9	[1]:14.598	$\int \frac{dx}{\sinh^2 ax \cosh^2 ax}$	20
10	[1]:14.599	$\int \frac{\sinh^2 ax}{\cosh ax} \, dx$	22
11	[1]:14.600	$\int \frac{\cosh^2 ax}{\sinh ax} \, dx$	23
12	[1]:14.601	$\int \frac{dx}{\cosh ax(1 + \sinh ax)}$	25
13	[1]:14.602	$\int \frac{dx}{\sinh ax(\cosh ax + 1)}$	28
14	[1]:14.603	$\int \frac{dx}{\sinh ax(\cosh ax - 1)}$	34

1 [1]:14.590 $\int \sinh ax \cosh ax \, dx$

$$\int \sinh ax \cosh ax = \frac{\sinh^2 ax}{2a}$$

```

(*)≡
)spool schaum29.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(sinh(a*x)*cosh(a*x),x)
--R
--R
--R          2          2
--R      sinh(a x) + cosh(a x)
--R (1)  -----
--R          4a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb:=sinh(a*x)^2/(2*a)
--R
--R          2
--R      sinh(a x)
--R (2)  -----
--R          2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 3
cc:=aa-bb
--R
--R          2          2
--R      - sinh(a x) + cosh(a x)
--R (3)  -----
--R          4a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 4
sinhsqrrule:=rule(sinh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)-1/2)
--R
--R          2      cosh(2x) - 1

```

```

--R (4) sinh(x) == -----
--R                                  2
--R                                Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 5
dd:=sinhsqrrule cc
--R
--R                                  2
--R      - cosh(2a x) + 2cosh(a x) + 1
--R (5) -----
--R                                  8a
--R
--R                                Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 6
coshsqrrule:=rule(cosh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)+1/2)
--R
--R      2   cosh(2x) + 1
--R (6) cosh(x) == -----
--R                                  2
--R                                Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 7      14:590 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=coshsqrrule dd
--R
--R      1
--R (7) --
--R      4a
--R
--R                                Type: Expression Integer
--E

```

2 [1]:14.591 $\int \sinh px \cosh qx \, dx$

$$\int \sinh px \cosh qx = \frac{\cosh(p+q)x}{2(p+q)} + \frac{\cosh(p-q)x}{2(p-q)}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 8
aa:=integrate(sinh(p*x)*cosh(q*x),x)
--R
--R
--R      - q sinh(p x)sinh(q x) + p cosh(p x)cosh(q x)
--R (1) -----
--R      2      2      2      2      2      2
--R      (q - p )sinh(p x) + (- q + p )cosh(p x)
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 9
bb:=(cosh(p+q)*x)/(2*(p+q))+(cosh(p-q)*x)/(2*(p-q))
--R
--R      (q - p)x cosh(q + p) + (- q - p)x cosh(q - p)
--R (2) -----
--R      2      2
--R      2q - 2p
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 10      14:591 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      - 2q sinh(p x)sinh(q x)
--R      +
--R      ((- q + p)x cosh(q + p) + (q + p)x cosh(q - p))sinh(p x)2
--R      +
--R      2p cosh(p x)cosh(q x)
--R      +
--R      ((q - p)x cosh(q + p) + (- q - p)x cosh(q - p))cosh(p x)2
--R /
--R      2      2      2      2      2      2
--R      (2q - 2p )sinh(p x) + (- 2q + 2p )cosh(p x)
--R                                          Type: Expression Integer

```

--E

3 [1]:14.592 $\int \sinh^n ax \cosh ax \, dx$

$$\int \sinh^n ax \cosh ax = \frac{\sinh^{n+1} ax}{(n+1)a}$$

$\langle * \rangle + \equiv$

)clear all

--S 11

aa:=integrate(sinh(a*x)^n*cosh(a*x),x)

--R

--R

--R $- \sinh(ax) \sinh(n \log(\sinh(ax))) - \sinh(ax) \cosh(n \log(\sinh(ax)))$

--R (1) -----

--R $(a^n + a) \sinh^2(ax) + (-a^n - a) \cosh^2(ax)$

--R Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 12

bb:=sinh(a*x)/((n+1)*a)

--R

--R $\sinh(ax)$

--R (2) -----

--R $a^n + a$

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 13 14:592 Axiom cannot simplify this expression

cc:=aa-bb

--R

--R (3)

--R $- \sinh(ax) \sinh(n \log(\sinh(ax))) - \sinh(ax) \cosh(n \log(\sinh(ax)))$

--R +

--R $-\sinh^3(ax) + \cosh^2(ax) \sinh(ax)$

--R /

--R $(a^n + a) \sinh^2(ax) + (-a^n - a) \cosh^2(ax)$

--R

--R

Type: Expression Integer

--E

4 [1]:14.593 $\int \cosh^n ax \sinh ax \, dx$

$$\int \cosh^n ax \sinh ax = \frac{\cosh^{n+1} ax}{(n+1)a}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 14
aa:=integrate(cosh(a*x)^n*sinh(a*x),x)
--R
--R
--R      - cosh(a x)sinh(n log(cosh(a x))) - cosh(a x)cosh(n log(cosh(a x)))
--R (1) -----
--R                                  2                2
--R                    (a n + a)sinh(a x)  + (- a n - a)cosh(a x)
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 15
bb:=cosh(a*x)^(n+1)/((n+1)*a)
--R
--R
--R      n + 1
--R      cosh(a x)
--R (2) -----
--R      a n + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 16      14:593 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      - cosh(a x)sinh(n log(cosh(a x))) - cosh(a x)cosh(n log(cosh(a x)))
--R      +
--R      (- sinh(a x)2 + cosh(a x)2)cosh(a x)n + 1
--R /
--R      (a n + a)sinh(a x)2 + (- a n - a)cosh(a x)2
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

5 [1]:14.594 $\int \sinh^2 ax \cosh^2 ax \, dx$

$$\int \sinh^2 ax \cosh^2 ax = \frac{\sinh 4ax}{32a} - \frac{x}{8}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 17
aa:=integrate(sinh(a*x)^2*cosh(a*x)^2,x)
--R
--R
--R
--R              3          3
--R      cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x) sinh(a x) - a x
--R (1) -----
--R                               8a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 18
bb:=sinh(4*a*x)/(32*a)-x/8
--R
--R      sinh(4a x) - 4a x
--R (2) -----
--R              32a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 19      14:594 Schaums and Axiom agree
cc:=complexNormalize(aa-bb)
--R
--R (3)  0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

6 [1]:14.595 $\int \frac{dx}{\sinh ax \cosh ax}$
 $\int \frac{1}{\sinh ax \cosh ax} = \frac{1}{a} \ln \tanh ax$

```

(*)+≡
)clear all

--S 20
aa:=integrate(1/(sinh(a*x)*cosh(a*x)),x)
--R
--R
--R          2cosh(a x)          2sinh(a x)
--R      - log(- -----) + log(- -----)
--R          sinh(a x) - cosh(a x)    sinh(a x) - cosh(a x)
--R (1) -----
--R                                     a
--R                                     Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 21
bb:=1/a*log(tanh(a*x))
--R
--R      log(tanh(a x))
--R (2) -----
--R          a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

--S 22
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R          2cosh(a x)
--R      - log(tanh(a x)) - log(- -----)
--R          sinh(a x) - cosh(a x)
--R
--R      +
--R          2sinh(a x)
--R      log(- -----)
--R          sinh(a x) - cosh(a x)
--R /
--R      a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 23
dd:=expandLog cc
--R
--R      - log(tanh(a x)) + log(sinh(a x)) - log(cosh(a x))
--R (4) -----
--R                                  a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 24
tanhrule:=rule(tanh(x) == sinh(x)/cosh(x))
--R
--R      sinh(x)
--R (5) tanh(x) == -----
--R      cosh(x)
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 25
ee:=tanhrule dd
--R
--R      sinh(a x)
--R      log(sinh(a x)) - log(-----) - log(cosh(a x))
--R                          cosh(a x)
--R (6) -----
--R                                  a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 26      14:595 Schaums and Axiom agree
ff:=expandLog ee
--R
--R (7) 0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

7 [1]:14.596 $\int \frac{dx}{\sinh^2 ax \cosh ax}$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 ax \cosh ax} = -\frac{1}{a} \tan^{-1} \sinh ax - \frac{\operatorname{csch} ax}{a}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 27
aa:=integrate(1/(sinh(a*x)^2*cosh(a*x)),x)
--R
--R (1)
--R      2
--R      (- 2sinh(a x)  - 4cosh(a x)sinh(a x) - 2cosh(a x)  + 2)
--R      *
--R      atan(sinh(a x) + cosh(a x))
--R      +
--R      - 2sinh(a x) - 2cosh(a x)
--R      /
--R      2
--R      a sinh(a x)  + 2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(a x)  - a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 28
bb:=-1/a*atan(sinh(a*x)-csch(a*x))/a
--R
--R      atan(sinh(a x) - csch(a x))
--R (2)  - -----
--R      2
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 29      14:596 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      2
--R      (- 2a sinh(a x)  - 4a cosh(a x)sinh(a x) - 2a cosh(a x)  + 2a)
--R      *
--R      atan(sinh(a x) + cosh(a x))
--R      +
--R      2
--R      (sinh(a x)  + 2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x)  - 1)

```

```

--R      *
--R      atan(sinh(a x) - csch(a x))
--R      +
--R      - 2a sinh(a x) - 2a cosh(a x)
--R      /
--R      2      2      2      2      2      2
--R      a sinh(a x) + 2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(a x) - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

8 [1]:14.597 $\int \frac{dx}{\sinh ax \cosh^2 ax}$

$$\int \frac{1}{\sinh ax \cosh^2 ax} = \frac{\operatorname{sech} ax}{a} + \frac{1}{a} \ln \tanh \frac{ax}{2}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 30
aa:=integrate(1/(sinh(a*x)*cosh(a*x)^2),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R      2
--R      (- sinh(a x)  - 2cosh(a x)sinh(a x) - cosh(a x)  - 1)
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      +
--R      2
--R      (sinh(a x)  + 2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x)  + 1)
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R      2sinh(a x) + 2cosh(a x)
--R      /
--R      2
--R      a sinh(a x)  + 2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(a x)  + a
--R
--R      Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 31
bb:=sech(a*x)/a+1/a*log(tanh((a*x)/2))
--R
--R
--R      a x
--R      log(tanh(---)) + sech(a x)
--R      2
--R (2) -----
--R      a
--R
--R      Type: Expression Integer
--E

--S 32
cc:=aa-bb
--R
--R (3)

```

```

--R      2      2      a x
--R      (- sinh(a x) - 2cosh(a x)sinh(a x) - cosh(a x) - 1)log(tanh(---))
--R
--R      +
--R      2      2
--R      (- sinh(a x) - 2cosh(a x)sinh(a x) - cosh(a x) - 1)
--R
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R
--R      +
--R      2      2
--R      (sinh(a x) + 2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R
--R      +
--R      2
--R      - sech(a x)sinh(a x) + (- 2cosh(a x)sech(a x) + 2)sinh(a x)
--R
--R      +
--R      2
--R      (- cosh(a x) - 1)sech(a x) + 2cosh(a x)
--R
--R      /
--R      2      2
--R      a sinh(a x) + 2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(a x) + a
--R
--R      Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 33
sechrule:=rule(sech(x) == 1/cosh(x))
--R
--R      1
--R      (4) sech(x) == -----
--R      cosh(x)
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 34
dd:=sechrule cc
--R
--R      (5)
--R      2      2      3
--R      (- cosh(a x)sinh(a x) - 2cosh(a x) sinh(a x) - cosh(a x) - cosh(a x))
--R
--R      *
--R      a x
--R      log(tanh(---))
--R      2
--R
--R      +
--R      2      2      3

```

```

--R      (- cosh(a x)sinh(a x) - 2cosh(a x) sinh(a x) - cosh(a x) - cosh(a x))
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      +
--R      (cosh(a x)sinh(a x)2 + 2cosh(a x) sinh(a x)2 + cosh(a x)3 + cosh(a x))
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R      - sinh(a x)2 + cosh(a x)2 - 1
--R      /
--R      a cosh(a x)sinh(a x)2 + 2a cosh(a x) sinh(a x)2 + a cosh(a x)3 + a cosh(a x)
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 35
tanhrule:=rule(tanh(x) == sinh(x)/cosh(x))
--R
--R      sinh(x)
--R      (6) tanh(x) == -----
--R      cosh(x)
--R      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 36
ee:=tanhrule dd
--R
--R      (7)
--R      (- cosh(a x)sinh(a x)2 - 2cosh(a x) sinh(a x)2 - cosh(a x)3 - cosh(a x))
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      +
--R      (cosh(a x)sinh(a x)2 + 2cosh(a x) sinh(a x)2 + cosh(a x)3 + cosh(a x))
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R      (- cosh(a x)sinh(a x)2 - 2cosh(a x) sinh(a x)2 - cosh(a x)3 - cosh(a x))
--R      *
--R      a x
--R      sinh(---)
--R      2

```

```

--R      log(-----)
--R              a x
--R      cosh(---)
--R              2
--R      +
--R              2      2
--R      - sinh(a x) + cosh(a x) - 1
--R      /
--R              2      2      3
--R      a cosh(a x)sinh(a x) + 2a cosh(a x) sinh(a x) + a cosh(a x) + a cosh(a x)
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 37
coshcuberule:=rule(cosh(x)^3 == 1/4*cosh(3*x)-3/4*cosh(x))
--R
--R      3      cosh(3x) - 3cosh(x)
--R      (8) cosh(x) == -----
--R                      4
--R                      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 38
ff:=coshcuberule ee
--R
--R      (9)
--R              2      2
--R      - 4cosh(a x)sinh(a x) - 8cosh(a x) sinh(a x) - cosh(3a x)
--R      +
--R      - cosh(a x)
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      +
--R              2      2
--R      (4cosh(a x)sinh(a x) + 8cosh(a x) sinh(a x) + cosh(3a x) + cosh(a x))
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R              2      2
--R      - 4cosh(a x)sinh(a x) - 8cosh(a x) sinh(a x) - cosh(3a x)
--R      +
--R      - cosh(a x)
--R      *
--R              a x
--R      sinh(---)
--R              2

```

```

--R      log(-----)
--R      a x
--R      cosh(---)
--R      2
--R      +
--R      2      2
--R      - 4sinh(a x) + 4cosh(a x) - 4
--R      /
--R      2      2
--R      4a cosh(a x)sinh(a x) + 8a cosh(a x) sinh(a x) + a cosh(3a x)
--R      +
--R      a cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 39
coshsqrrule:=rule(cosh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)+1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) + 1
--R      (10) cosh(x) == -----
--R      2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 40
gg:=coshsqrrule ff
--R
--R      (11)
--R      2
--R      - 4cosh(a x)sinh(a x) + (- 4cosh(2a x) - 4)sinh(a x) - cosh(3a x)
--R      +
--R      - cosh(a x)
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      +
--R      2
--R      4cosh(a x)sinh(a x) + (4cosh(2a x) + 4)sinh(a x) + cosh(3a x)
--R      +
--R      cosh(a x)
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R      2
--R      - 4cosh(a x)sinh(a x) + (- 4cosh(2a x) - 4)sinh(a x) - cosh(3a x)
--R      +
--R      - cosh(a x)

```

```

--R      *
--R          a x
--R      sinh(---)
--R          2
--R      log(-----)
--R          a x
--R      cosh(---)
--R          2
--R      +
--R          2
--R      - 4sinh(a x) + 2cosh(2a x) - 2
--R      /
--R          2
--R      4a cosh(a x)sinh(a x) + (4a cosh(2a x) + 4a)sinh(a x) + a cosh(3a x)
--R      +
--R      a cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 41
sinhsqrrule:=rule(sinh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)-1/2)
--R
--R          2    cosh(2x) - 1
--R      (12) sinh(x) == -----
--R          2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 42
hh:=sinhsqrrule gg
--R
--R      (13)
--R      - log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1) + log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R          a x
--R      sinh(---)
--R          2
--R      - log(-----)
--R          a x
--R      cosh(---)
--R          2
--R      /
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 43
ii:=expandLog hh
--R
--R (14)
--R - log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1) + log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R +
--R      a x      a x
--R - log(sinh(---)) + log(cosh(---))
--R      2      2
--R /
--R a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 44      14:597 Schaums and Axiom agree
jj:=complexNormalize ii
--R
--R (15) 0
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

9 [1]:14.598 $\int \frac{dx}{\sinh^2 ax \cosh^2 ax}$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 ax \cosh^2 ax} = -\frac{2 \coth 2ax}{a}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 45
aa:=integrate(1/(sinh(a*x)^2*cosh(a*x)^2),x)
--R
--R
--R (1)
--R -
--R /
--R      4      3      2      2
--R      a sinh(a x) + 4a cosh(a x)sinh(a x) + 6a cosh(a x) sinh(a x)
--R +
--R      3      4
--R      4a cosh(a x) sinh(a x) + a cosh(a x) - a
--R
--R                                         Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 46
bb:=- (2*coth(2*a*x))/a
--R
--R      2coth(2a x)
--R (2) - -----
--R      a
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 47      14:598 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R      4      3
--R      2coth(2a x)sinh(a x) + 8cosh(a x)coth(2a x)sinh(a x)
--R +
--R      2      2      3
--R      12cosh(a x) coth(2a x)sinh(a x) + 8cosh(a x) coth(2a x)sinh(a x)
--R +
--R      4
--R      (2cosh(a x) - 2)coth(2a x) - 4
```

```

--R /
--R      4      3      2      2
--R      a sinh(a x) + 4a cosh(a x)sinh(a x) + 6a cosh(a x) sinh(a x)
--R      +
--R      3      4
--R      4a cosh(a x) sinh(a x) + a cosh(a x) - a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

10 [1]:14.599 $\int \frac{\sinh^2 ax}{\cosh ax} dx$

$$\int \frac{\sinh^2 ax}{\cosh ax} dx = \frac{\sinh ax}{a} - \frac{1}{a} \tan^{-1} \sinh ax$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 48
aa:=integrate(sinh(a*x)^2/cosh(a*x),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R      (- 4sinh(a x) - 4cosh(a x))atan(sinh(a x) + cosh(a x)) + sinh(a x)2
--R      +
--R      2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x)2 - 1
--R /
--R      2a sinh(a x) + 2a cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 49
bb:=sinh(a*x)/a-1/a*atan(sinh(a*x))
--R
--R
--R      - atan(sinh(a x)) + sinh(a x)
--R (2) -----
--R      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

```
--S 50      14:599 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb
--R
--R
--R (3)
--R      (- 4sinh(a x) - 4cosh(a x))atan(sinh(a x) + cosh(a x))
--R      +
--R      (2sinh(a x) + 2cosh(a x))atan(sinh(a x)) - sinh(a x)2 + cosh(a x)2 - 1
--R /
--R      2a sinh(a x) + 2a cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```

11 [1]:14.600 $\int \frac{\cosh^2 ax}{\sinh ax} dx$

$$\int \frac{\cosh^2 ax}{\sinh ax} = \frac{\cosh ax}{a} + \frac{1}{a} \ln \tanh \frac{ax}{2}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 51
aa:=integrate(cosh(a*x)^2/sinh(a*x),x)
--R
--R
--R (1)
--R (- 2sinh(a x) - 2cosh(a x))log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R +
--R (2sinh(a x) + 2cosh(a x))log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1) + sinh(a x)
--R +
--R 2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x)
--R /
--R 2a sinh(a x) + 2a cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 52
bb:=cosh(a*x)/a+1/a*log(tanh((a*x)/2))
--R
--R          a x
--R    log(tanh(---)) + cosh(a x)
--R          2
--R (2) -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 53    14:600 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R          a x
--R    (- 2sinh(a x) - 2cosh(a x))log(tanh(---))
--R          2
--R +
--R    (- 2sinh(a x) - 2cosh(a x))log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)

```

```

--R      +
--R      (2sinh(a x) + 2cosh(a x))log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1) + sinh(a x)2
--R      +
--R      - cosh(a x)2 + 1
--R      /
--R      2a sinh(a x) + 2a cosh(a x)
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

12 [1]:14.601 $\int \frac{dx}{\cosh ax(1 + \sinh ax)}$

$$\int \frac{1}{\cosh ax(1 + \sinh ax)} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{1 + \sinh ax}{\cosh ax} \right) + \frac{1}{a} \tan^{-1} e^{ax}$$

(*)+=
)clear all

--S 54

aa:=integrate(1/(cosh(a*x)*(1+sinh(a*x))),x)

--R

--R

--R (1)

$$\begin{aligned} & - \log\left(-\frac{2\cosh(ax)}{\sinh(ax) - \cosh(ax)}\right) + \log\left(\frac{-2\sinh(ax) - 2}{\sinh(ax) - \cosh(ax)}\right) \\ & + 2\operatorname{atan}(\sinh(ax) + \cosh(ax)) \\ & / \\ & 2a \end{aligned}$$

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 55

bb:=1/(2*a)*log((1+sinh(a*x))/cosh(a*x))+1/a*atan(%e^(a*x))

--R

$$\begin{aligned} & \log\left(\frac{\sinh(ax) + 1}{\cosh(ax)}\right) + 2\operatorname{atan}(e^{ax}) \end{aligned}$$

$$(2) \frac{\log\left(\frac{\sinh(ax) + 1}{\cosh(ax)}\right) + 2\operatorname{atan}(e^{ax})}{2a}$$

Type: Expression Integer

--E

--S 56

cc:=aa-bb

--R

--R (3)

$$\begin{aligned} & - \log\left(\frac{\sinh(ax) + 1}{\cosh(ax)}\right) - \log\left(-\frac{2\cosh(ax)}{\sinh(ax) - \cosh(ax)}\right) \\ & + \log\left(\frac{-2\sinh(ax) - 2}{\sinh(ax) - \cosh(ax)}\right) + 2\operatorname{atan}(\sinh(ax) + \cosh(ax)) - 2\operatorname{atan}(e^{ax}) \end{aligned}$$

```

--R /
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 57
dd:=expandLog cc
--R
--R
--R                                          a x
--R      atan(sinh(a x) + cosh(a x)) - atan(%e  )
--R (4) -----
--R                                          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 58
atanrule:=rule(atan(x) == -%i/2*log((1+%i*x)/(1-%i*x)))
--R
--R
--R          - x + %i
--R      %i log(-----)
--R          x + %i
--R (5) atan(x) == - -----
--R                    2
--R
--R      Type: RewriteRule(Integer,Complex Integer,Expression Complex Integer)
--E

```

```

--S 59
ee:=atanrule dd
--R
--R
--R          a x
--R      - %e  + %i
--R      %i log(-----) - %i log(-----)
--R          a x
--R          %e  + %i
--R          sinh(a x) - cosh(a x) + %i
--R          sinh(a x) + cosh(a x) + %i
--R (6) -----
--R                                          2a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 60
ff:=expandLog ee
--R
--R (7)
--R      %i log(sinh(a x) + cosh(a x) + %i) - %i log(sinh(a x) + cosh(a x) - %i)
--R      +
--R          a x
--R          a x

```

```

--R      - %i log(%e  + %i) + %i log(%e  - %i)
--R /
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

```

--S 61      14:601 Schaums and Axiom agree
gg:=complexNormalize ff
--R
--R      (8)  0
--R
--R                                          Type: Expression Complex Integer
--E

```

13 [1]:14.602 $\int \frac{dx}{\sinh ax(\cosh ax + 1)}$

$$\int \frac{1}{\sinh ax(\cosh ax + 1)} = \frac{1}{2a} \ln \tanh \frac{ax}{2} + \frac{1}{2a(\cosh ax + 1)}$$

`<*>+=
)clear all`

```
--S 62
aa:=integrate(1/(sinh(a*x)*(cosh(a*x)+1)),x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R      2
--R      - sinh(a x) + (- 2cosh(a x) - 2)sinh(a x) - cosh(a x) - 2cosh(a x)
--R      +
--R      - 1
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      +
--R      2
--R      (sinh(a x) + (2cosh(a x) + 2)sinh(a x) + cosh(a x) + 2cosh(a x) + 1)
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R      2sinh(a x) + 2cosh(a x)
--R      /
--R      2
--R      2a sinh(a x) + (4a cosh(a x) + 4a)sinh(a x) + 2a cosh(a x)
--R      +
--R      4a cosh(a x) + 2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 63
bb:=1/(2*a)*log(tanh((a*x)/2))+1/(2*a*(cosh(a*x)+1))
--R
--R
--R      a x
--R      (cosh(a x) + 1)log(tanh(---)) + 1
--R      2
--R (2) -----
--R      2a cosh(a x) + 2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E
```


--E

--S 65

coshcuberule:=rule(cosh(x)^3 == 1/4*cosh(3*x)-3/4*cosh(x))

--R

--R (4) $\cosh(x)^3 == \frac{\cosh(3x) - 3\cosh(x)}{4}$

--R

--R

Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)

--E

--S 66

dd:=coshcuberule cc

--R

--R (5)

--R

--R $(-4\cosh(ax) - 4)\sinh(ax)^2$

--R +

--R $(-8\cosh(ax)^2 - 16\cosh(ax) - 8)\sinh(ax) - \cosh(3ax)$

--R +

--R $-12\cosh(ax)^2 - 9\cosh(ax) - 4$

--R *

--R $\log(\tanh(\frac{ax}{2}))$

--R +

--R $(-4\cosh(ax) - 4)\sinh(ax)^2$

--R +

--R $(-8\cosh(ax)^2 - 16\cosh(ax) - 8)\sinh(ax) - \cosh(3ax)$

--R +

--R $-12\cosh(ax)^2 - 9\cosh(ax) - 4$

--R *

--R $\log(\sinh(ax) + \cosh(ax) + 1)$

--R +

--R $(4\cosh(ax) + 4)\sinh(ax)^2 + (8\cosh(ax)^2 + 16\cosh(ax) + 8)\sinh(ax)$

--R +

--R $\cosh(3ax) + 12\cosh(ax)^2 + 9\cosh(ax) + 4$

--R *

--R $\log(\sinh(ax) + \cosh(ax) - 1)$

```

--R      +
--R      2      2
--R      - 4sinh(a x) + 4cosh(a x) - 4
--R      /
--R      2
--R      (8a cosh(a x) + 8a)sinh(a x)
--R      +
--R      2
--R      (16a cosh(a x) + 32a cosh(a x) + 16a)sinh(a x) + 2a cosh(3a x)
--R      +
--R      2
--R      24a cosh(a x) + 18a cosh(a x) + 8a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 67
sinhsqrrule:=rule(sinh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)-1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) - 1
--R      (6)  sinh(x) == -----
--R      2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 68
ee:=sinhsqrrule dd
--R
--R      (7)
--R      2
--R      (- 8cosh(a x) - 16cosh(a x) - 8)sinh(a x) - cosh(3a x)
--R      +
--R      2
--R      (- 2cosh(a x) - 2)cosh(2a x) - 12cosh(a x) - 7cosh(a x) - 2
--R      *
--R      a x
--R      log(tanh(---))
--R      2
--R      +
--R      2
--R      (- 8cosh(a x) - 16cosh(a x) - 8)sinh(a x) - cosh(3a x)
--R      +
--R      2
--R      (- 2cosh(a x) - 2)cosh(2a x) - 12cosh(a x) - 7cosh(a x) - 2
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      +

```

```

--R
--R      2
--R      (8cosh(a x) + 16cosh(a x) + 8)sinh(a x) + cosh(3a x)
--R      +
--R      2
--R      (2cosh(a x) + 2)cosh(2a x) + 12cosh(a x) + 7cosh(a x) + 2
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R      2
--R      - 2cosh(2a x) + 4cosh(a x) - 2
--R      /
--R      2
--R      (16a cosh(a x) + 32a cosh(a x) + 16a)sinh(a x) + 2a cosh(3a x)
--R      +
--R      2
--R      (4a cosh(a x) + 4a)cosh(2a x) + 24a cosh(a x) + 14a cosh(a x) + 4a
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 69
coshsqrrule:=rule(cosh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)+1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) + 1
--R      (8) cosh(x) == -----
--R                      2
--R                      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 70
ff:=coshsqrrule ee
--R
--R      (9)
--R      a x
--R      - log(tanh(---)) - log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      2
--R      +
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      /
--R      2a
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 71      14:602 Schaums and Axiom agree
gg:=complexNormalize ff
--R
--R      (10) 0

```

--R
--E

Type: Expression Integer

14 [1]:14.603 $\int \frac{dx}{\sinh ax(\cosh ax - 1)}$

$$\int \frac{1}{\sinh ax(\cosh ax - 1)} = -\frac{1}{2a} \ln \tanh \frac{ax}{2} - \frac{1}{2a(\cosh ax - 1)}$$

```
(*)+=
)clear all
```

```
--S 72
```

```
aa:=integrate(1/(sinh(a*x)*(cosh(a*x)-1)),x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R (1)
```

```
--R      2      2
--R      (sinh(a x) + (2cosh(a x) - 2)sinh(a x) + cosh(a x) - 2cosh(a x) + 1)
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      +
--R      2      2
--R      - sinh(a x) + (- 2cosh(a x) + 2)sinh(a x) - cosh(a x) + 2cosh(a x)
--R      +
--R      - 1
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R      - 2sinh(a x) - 2cosh(a x)
--R      /
--R      2      2
--R      2a sinh(a x) + (4a cosh(a x) - 4a)sinh(a x) + 2a cosh(a x)
--R      +
--R      - 4a cosh(a x) + 2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E
```

```
--S 73
```

```
bb:=-1/(2*a)*log(tanh((a*x)/2))-1/(2*a*(cosh(a*x)-1))
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      a x
--R      (- cosh(a x) + 1)log(tanh(---)) - 1
--R      2
```

```
--R (2) -----
--R      2a cosh(a x) - 2a
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--E
```

```
Type: Expression Integer
```

```

--S 74
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R
--R      2      2
--R      (cosh(a x) - 1)sinh(a x) + (2cosh(a x) - 4cosh(a x) + 2)sinh(a x)
--R      +
--R      3      2
--R      cosh(a x) - 3cosh(a x) + 3cosh(a x) - 1
--R      *
--R      a x
--R      log(tanh(---))
--R      2
--R      +
--R      2      2
--R      (cosh(a x) - 1)sinh(a x) + (2cosh(a x) - 4cosh(a x) + 2)sinh(a x)
--R      +
--R      3      2
--R      cosh(a x) - 3cosh(a x) + 3cosh(a x) - 1
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      +
--R      2
--R      (- cosh(a x) + 1)sinh(a x)
--R      +
--R      2      3      2
--R      (- 2cosh(a x) + 4cosh(a x) - 2)sinh(a x) - cosh(a x) + 3cosh(a x)
--R      +
--R      - 3cosh(a x) + 1
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R      2      2
--R      sinh(a x) - cosh(a x) + 1
--R      /
--R      2
--R      (2a cosh(a x) - 2a)sinh(a x)
--R      +
--R      2      3
--R      (4a cosh(a x) - 8a cosh(a x) + 4a)sinh(a x) + 2a cosh(a x)
--R      +
--R      2
--R      - 6a cosh(a x) + 6a cosh(a x) - 2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 75
coshcuberule:=rule(cosh(x)^3 == 1/4*cosh(3*x)-3/4*cosh(x))
--R
--R          3      cosh(3x) - 3cosh(x)
--R (4)  cosh(x) == -----
--R                      4
--R
--R                      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 76
dd:=coshcuberule cc
--R
--R (5)
--R
--R          2      2
--R      (4cosh(a x) - 4)sinh(a x) + (8cosh(a x) - 16cosh(a x) + 8)sinh(a x)
--R
--R      +
--R
--R          2
--R      cosh(3a x) - 12cosh(a x) + 9cosh(a x) - 4
--R
--R      *
--R
--R          a x
--R      log(tanh(---))
--R          2
--R
--R      +
--R
--R          2      2
--R      (4cosh(a x) - 4)sinh(a x) + (8cosh(a x) - 16cosh(a x) + 8)sinh(a x)
--R
--R      +
--R
--R          2
--R      cosh(3a x) - 12cosh(a x) + 9cosh(a x) - 4
--R
--R      *
--R
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R
--R      +
--R
--R          2
--R      (- 4cosh(a x) + 4)sinh(a x)
--R
--R      +
--R
--R          2
--R      (- 8cosh(a x) + 16cosh(a x) - 8)sinh(a x) - cosh(3a x)
--R
--R      +
--R
--R          2
--R      12cosh(a x) - 9cosh(a x) + 4
--R
--R      *
--R
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R
--R      +
--R
--R          2      2
--R      4sinh(a x) - 4cosh(a x) + 4
--R
--R      /
--R
--R          2

```

```

--R      (8a cosh(a x) - 8a)sinh(a x)
--R      +
--R      2
--R      (16a cosh(a x) - 32a cosh(a x) + 16a)sinh(a x) + 2a cosh(3a x)
--R      +
--R      2
--R      - 24a cosh(a x) + 18a cosh(a x) - 8a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 77
sinhsqrrule:=rule(sinh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)-1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) - 1
--R      (6)  sinh(x) == -----
--R      2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 78
ee:=sinhsqrrule dd
--R
--R      (7)
--R      2
--R      (8cosh(a x) - 16cosh(a x) + 8)sinh(a x) + cosh(3a x)
--R      +
--R      2
--R      (2cosh(a x) - 2)cosh(2a x) - 12cosh(a x) + 7cosh(a x) - 2
--R      *
--R      a x
--R      log(tanh(---))
--R      2
--R      +
--R      2
--R      (8cosh(a x) - 16cosh(a x) + 8)sinh(a x) + cosh(3a x)
--R      +
--R      2
--R      (2cosh(a x) - 2)cosh(2a x) - 12cosh(a x) + 7cosh(a x) - 2
--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      +
--R      2
--R      (- 8cosh(a x) + 16cosh(a x) - 8)sinh(a x) - cosh(3a x)
--R      +
--R      2
--R      (- 2cosh(a x) + 2)cosh(2a x) + 12cosh(a x) - 7cosh(a x) + 2

```

```

--R      *
--R      log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      +
--R      2
--R      2cosh(2a x) - 4cosh(a x) + 2
--R      /
--R      2
--R      (16a cosh(a x) - 32a cosh(a x) + 16a)sinh(a x) + 2a cosh(3a x)
--R      +
--R      2
--R      (4a cosh(a x) - 4a)cosh(2a x) - 24a cosh(a x) + 14a cosh(a x) - 4a
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 79
coshsqrrule:=rule(cosh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)+1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) + 1
--R      (8)  cosh(x) == -----
--R                      2
--R                      Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 80
ff:=coshsqrrule ee
--R
--R      (9)
--R      a x
--R      log(tanh(---)) + log(sinh(a x) + cosh(a x) + 1)
--R      2
--R      +
--R      - log(sinh(a x) + cosh(a x) - 1)
--R      /
--R      2a
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 81      14:603 Schaums and Axiom agree
gg:=complexNormalize ff
--R
--R      (10)  0
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

)spool
)lisp (bye)

```

References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 pp89-90